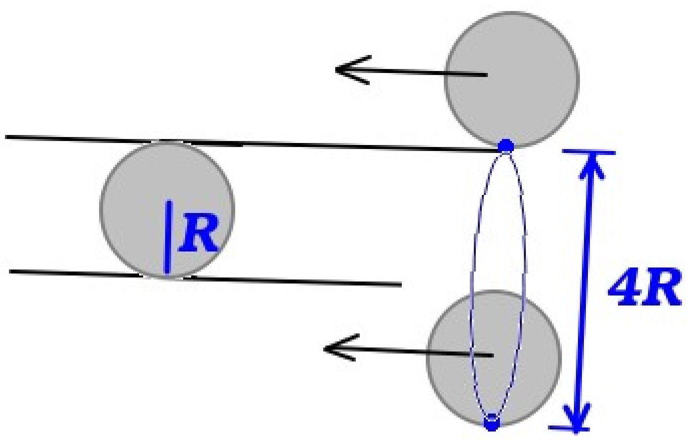
Przekrój czynny

(ang. cross-section)

Cząstka (pocisk) zbliża się w swoim locie w kierunku jądra – centrum oddziaływania (tarczy), na które to oddziaływanie jest wrażliwa. To, czy reakcja z jej udziałem w polu jądra zajdzie, zależy od tego, czy wejdzie ona w zasięg skutecznego oddziaływania z centrum, to znaczy, czy nastąpi – choćby peryferyjny – kontakt cząstki w jej torze lotu z zasięgiem działania siły z centrum. W przypadku dwóch kul bilardowych spytamy, czy nastąpiło ich zderzenie o siebie, czy też uderzona przez nas bila chybiła celu?

Przekrój czynny (ozn. małą literą σ) na dane oddziaływanie (kolizję, odpychanie, reakcję jądrową, etc.) jest w trójwymiarowej przestrzeni miarą pola powierzchni, jakie reprezentuje pole siły centrum oddziaływania, tak, aby doszło skutecznie do reakcji cząstka-centrum. Im większy jest przekrój czynny pojedynczego centrum oraz im większa koncentracja centrów w próbce, tym większe są szanse, że cząstka (stanowiąca albo pojedynczy pocisk, albo część oświetlającego tę próbkę strumienia cząstek) ulegnie reakcji.

Skutki reakcji mogą być troiste. Dwa najważniejsze to absorpcja, w wyniku której cząstka znika całkowicie (zasilając tym samym rezerwuar energii centrum oddziaływania) oraz rozpraszanie (kolizja), w wyniku którego cząstka zmienia parametry ruchu – swój kierunek – w konsekwencji czego zostaje ona usunięta z przelatującej przez próbkę spójnej wiązki. W tym wypadku może być tak, że bardzo niewielki ułamek energii zostanie uwięziony w strukturze centrów, co oznacza, że cząstka nie utraciła swego pędu, tylko uległ on zmianie kierunku – innymi słowy, nastąpiło zderzenie sprężyste (elastyczne). Trzeci rodzaj przemian, który usuwa cząstkę z oryginalnego strumienia cząstek, to całkowita zmiana właściwości cząstki w wyniku reakcji (np. polaryzacja), tak, że detektor cząstek, wyczulony na cząstki o oryginalnym zestawie parametrów, takich, z jakimi nadlatywały w kierunku próbki, przepuści ją i nie wykaże jej obecności.



1. Zderzenia chaotyczne w gazie. Rozważmy prosty model gazu, w którym jego cząsteczki stanowią kulki o promieniu R i które zderzają się sprężyście ze sobą. Zaobserwujmy cząsteczkę gazu, nadlatującą z prawej strony rysunku z *prędkością względną* skierowaną w lewo (w układzie, w którym cząsteczka po lewej spoczywa), i zadajmy sobie pytanie: jak duży obszar jest dla naszej cząsteczki zakazany, jeśli nie ma ulec – choćby brzegowemu, peryferyjnemu – zderzeniu z cząsteczką gazu po lewej stronie? Obszar ten (na dwuwymiarowym obrazku przyjmujący charakter odcinka, a w trójwymiarze – kołowego przekroju) jest tożsamy z minimalnym przesunięciem w pionie zaznaczonego granatową kropką najniższego punktu kulki, od momentu, w którym zachodzi kolizja z górną krawędzią lewej kulki, aż do sytuacji, w której zachodzi ostatnia kolizja z dolną krawędzią lewej kulki. Przesunięcie to wynosi *4R*. Obszar przekroju czynnego jest kołem o średnicy *4R*, a zatem promieniu *2R* i wynosi $\pi(2R)^2$.

Możemy zadać sobie pytanie, *ile wynosi średnia droga swobodna λ cząsteczki gazu?* Tzn. droga (wyrażona w ułamkach metra), którą może przebyć średnio cząsteczka gazu, zanim ulegnie jakiemukolwiek rozproszeniu na innych cząsteczkach tego gazu? Jasne jest, że będzie ona odwrotnie proporcjonalna do przekroju czynnego σ oraz odwrotnie proporcjonalna do koncentracji cząsteczek N:

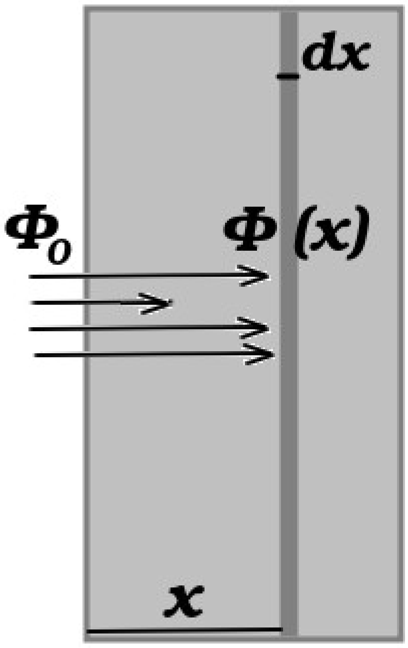
$$\lambda = \frac{1}{N}\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{N}\frac{1}{4\pi R^2} = \left[\frac{1}{\frac{1}{m^3}}\cdot\frac{1}{m^2}\right] = [m] \quad .$$

2. Absorpcja wiązki światła w oświetlanej próbce. Weźmy wiązkę cząstek (np. fotonów), stanowiących strumień o początkowej wartości Φ_0 i skierujmy ją na niezbyt grubą i niezbyt gęstą płytkę absorbentu o koncentracji centrów N o przekroju czynnym σ każde. Wówczas, zaobserwujemy systematyczne osłabianie się strumienia wiązki przelatującej przez absorbent.

Gdy cząstki osiągnęły już głębokość x wewnątrz płytki, ich bieżący strumień wynosi Φ. Przy przelatywaniu przez infinitezymalną grubość dx absorbentu (w ramach której centra nie przekrywają się wzajemnie, tj. nie zachodzą jedno na drugie) zmiana strumienia będzie dana formułą:

$$\frac{d\Phi}{dx} = -N\sigma\Phi \quad ,$$

ponieważ od tych trzech wielkości (łącznie z aktualną wielkością strumienia – liczbą cząstek do dyspozycji) zależy prawdopodobieństwo, że cząstka z wiązki ulegnie absorpcji.



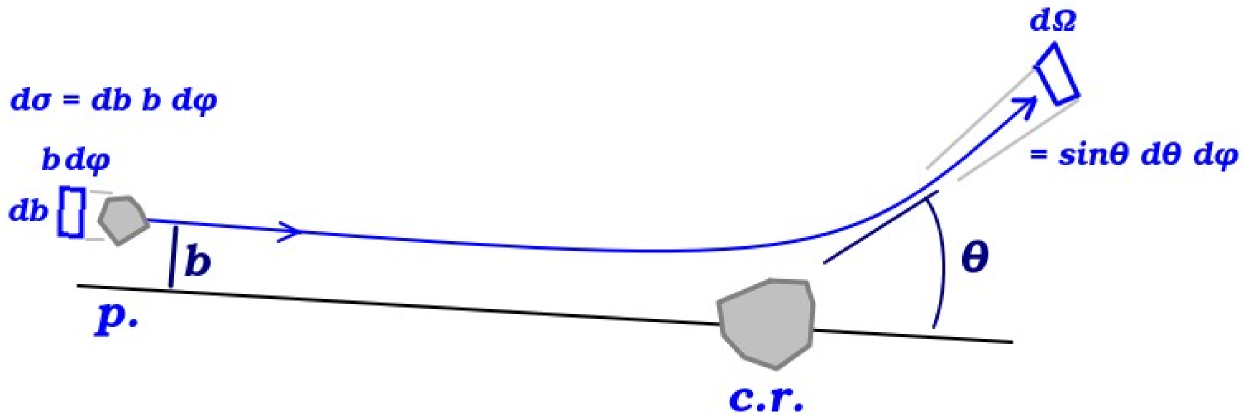
Rozwiązanie tego równania jest całkiem proste i zachodzi następująco:

$$\frac{d\,\Phi}{\Phi} \;=\; -N\,\sigma\,dx$$
$$\Leftrightarrow\;\ln\Phi \;+\; C \;=\; -N\,\sigma\,x$$
$$\Leftrightarrow\;\;\Phi \;=\; C_1 e^{-N\,\sigma\,x}\quad .$$

Warunek początkowy $x = 0$: $\Phi = \Phi_0$ nakazuje, żeby $C_1 = \Phi_0$. Biorąc pod uwagę definicję średniej drogi swobodnej w absorbencie (identyczną jak w poprzednim punkcie), otrzymujemy ostatecznie wartość wygaszanego wykładniczo strumienia początkowego, w zależności od drogi pokonanej w absorbencie wyskalowanej w λ, to jest *prawo Beera-Lamberta*

$$\Phi \;=\; \Phi_0\, e^{-\frac{x}{\lambda}}\quad .$$

3. Różniczkowy i całkowy (całkowity) przekrój czynny w akcie rozpraszania (kolizji). Cząstka-pocisk, lub ich wiązka, charakteryzująca się przekrojem poprzecznym wyrażonym elementem powierzchni $d\sigma$, przelatuje w małej odległości b od *osi zderzenia* (np. osi symetrii centrum rozpraszającego). Wielkość b, której nie kontrolujemy w statystycznych, pojedynczych aktach kolizji i musimy po niej uśredniać nasze rezultaty eksperymentów, nazywa się *parametrem zderzenia*. Rozproszona, cząstka poruszać się będzie po reakcji pod kątem ϑ do osi i zawarta będzie w elementarnym kącie bryłowym $d\Omega$.



Chcąc wykonać analizę kąta rozproszenia ϑ oraz jako że spodziewać się będziemy przynajmniej symetrii osiowej zagadnienia (symetryczne osiowo centrum rozproszeniowe), opis zderzenia przeprowadzimy we współrzędnych biegunowych (φ, ϑ). W nich, element $d\sigma$ wyraża się iloczynem $d\,\sigma \;=\; db\cdot b\;d\,\varphi$, zaś element powierzchni sfery to naturalnie $d\,\Omega \;=\; \sin\theta\cdot d\,\theta\cdot d\,\varphi$.

Różniczkowym przekrojem czynnym nazwiemy iloraz (pochodną) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, wyrażający zależność geometrii rozproszonej wiązki od geometrii wiązki padającej. Przy symetrii osiowej (symetrii względem kąta *φ*) obie różniczki zamienią się nam, odpowiednio, w $d\sigma = 2\pi b\, db$ (pole powierzchni kolistego krążka o szerokości *db*) oraz $d\Omega = 2\pi \sin\theta \cdot d\theta$.

Element *dσ*, dzięki zamianie różniczki *db*, możemy zapisać jako

$$d\sigma = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| d\theta \ .$$

Wartość bezwzględna oznacza, że wszystkie przyczynki do przekroju czynnego są dodatnie – przyczynek do trafienia w zagiętą do dołu tarczę (tj. gdy *b* spada z *ϑ*) i tak liczy się dla nas na plus – w przeciwieństwie np. do definicji strumienia i dywergencji (linii sił). Wyznaczając *dϑ* z drugiej formuły i podstawiając do pierwszej, mamy

$$d\sigma = \frac{b}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right| d\Omega \ ,$$

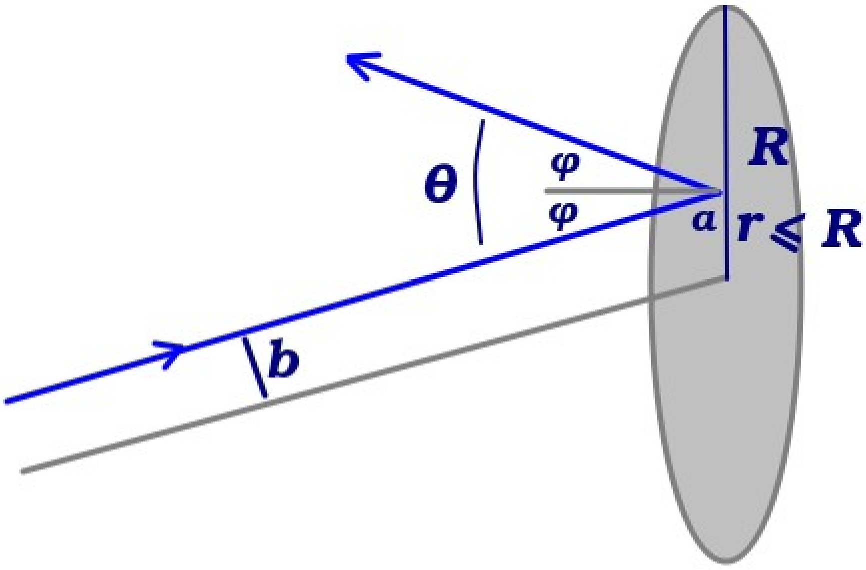
z której policzymy różniczkowy przekrój czynny na daną interakcję. Charakter oddziaływania determinuje nam postać pochodnej pod wartością bezwzględną. Zakładając znajomość funkcji występujących po prawej stronie równości, całkując ją obustronnie, otrzymamy wynik na **całkowity przekrój czynny**, $\sigma \equiv \int d\sigma$.

Aby wyrobić sobie lepszą intuicję w temacie, zróbmy poniższy przykład.

Przykład: *policzyć różniczkowy i całkowy przekrój czynny na odbijanie się wiązki laserowej od płaskiego zwierciadła o kształcie koła i promieniu R. Obliczenia dokonać dla sytuacji trójwymiarowej (przekrój czynny wyrażający się polem powierzchni) i dwuwymiarowej – lustro jest odcinkiem o długości 2R (przekrój czynny wyrażający się liczbą – długością odcinka).*

Nb. analogicznie, można myśleć o tym doświadczeniu jak o odbijaniu się elastycznym kuleczek od masywnej tarczy (piłki tenisowej od rakiety).

Nasze zagadnienie ilustrować będzie następujący rysunek:



Kątem rozproszenia będzie uwidoczniony na obrazku kąt ϑ, stanowiący podwojoną wartość kąta padania (równego kątowi odbicia) φ. Pomiędzy osią zderzenia (przechodzącą z konieczności przez środek symetrii – środek zwierciadła) a nadlatującym pociskiem panuje parametr zderzenia b. Będzie on kojarzył się z wielkością r, która dla wszelkich możliwych pocisków, które ulegną rozproszeniu, nie przekracza R. Pomiędzy padającym na lustro promieniem a pionową linią, na której odznaczony jest r oraz R, panuje kąt α, wyrażający kąt padania promienia w stosunku do tafli lustra.

Przekonujemy się bez trudu, że $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\alpha + \theta = \pi$. Parametr b wyraża się jako $b = r\sin\alpha$; największy możliwy parametr zderzenia (a zatem przekrój czynny, pochodzący od całego zwierciadła) będzie wtedy, gdy $r = R$: $b = R\sin\alpha = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\frac{\theta}{2}$.

Stąd także $\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}$. Podstawiając te wyniki do formuły na różniczkowy przekrój czynny, otrzymujemy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\,\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{4} \quad .$$

Stąd, całkowy przekrój czynny okazuje się mieć znajomą i spodziewaną przez nas wartość

$$\sigma = \int d\sigma = \int_0^{4\pi} \frac{R^2}{4} d\Omega = \pi R^2 \quad .$$

W przykładzie dwuwymiarowym, jednowymiarowy przekrój *dσ* składa się teraz tylko z *db,* zaś element kąta „bryłowowego” *dΩ* to obecnie element zwykłego kąta *dϑ*, który, zamiast zmieniać się (zmienna sferyczna) od *0* do *π*, zmienia się – jak to zwykły kąt na okręgu – od *0* do *2π*.

Geometria z rysunku nie uległa zmianie, tak że ponownie $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R}{2} \sin\frac{\theta}{2}$.

$$\sigma = \frac{R}{2} \int \sin\frac{\theta}{2} d\Omega = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = R\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2R \quad .$$

Autor: Marek Pietrachowicz.